Allgemeine Exponentialfunktion • Bierschaumzerfall
Übung

Die Höhe h der Schaumkrone (in mm) eines alkoholhaltigen Gerstenkaltgetränks kann in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) durch eine Exponentialfunktion

$$h(t) = a \cdot b^t$$

dargestellt werden. Bei den Rechnungen kann auf die Angabe von Einheiten verzichtet werden.

a) Während die Höhe des Schaums eine Minute nach dem Einschenken 27 mm beträgt, ist sie weitere zwei Minuten später bereits auf 5,5 mm zusammengefallen. Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ und runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf jeweils zwei Nachkommastellen. [Lösung: $a = 60$ und $b = 0{,}45$]

b) Bestimmen sie die Höhe des Bierschaums zwei Minuten nach dem Einschenken sowie die Zeit, innerhalb der die Höhe des Schaums nur noch 3 mm beträgt.

c) Welche Höhe nimmt die Schaumkrone nach sehr langer Zeit an?

d) Skizzieren Sie den Graphen von h(t) für die ersten sechs Minuten nach Einschenken des Biers. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie gegebenenfalls weitere Funktionswerte.

e) Die Halbwertszeit t_H ist die Zeitdauer, nach der sich jeweils die Höhe des Bierschaums halbiert. Berechnen Sie t_H auf zwei Nachkommastellen genau.

f) Wie lange würde der komplette Zerfall des Schaums dauern, wenn der Prozess von Beginn an linear anstatt exponentiell erfolgen würde und von den ursprünglichen 60 mm Schaumkrone nach der ersten Minute ebenso noch 27 mm übrig wären?

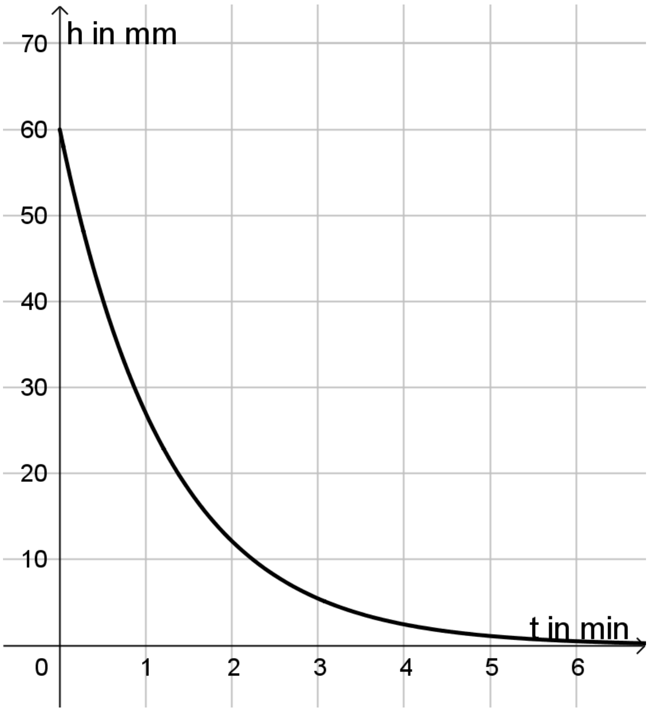
Allgemeine Exponentialfunktion • Bierschaumzerfall
Lösung

a) Es ergeben sich die Gleichungen
I) $h(1) = a \cdot b^1 = 27$
II) $h(3) = a \cdot b^3 = 5{,}5$
I) kann beispielsweise aufgelöst werden zu $a = \frac{27}{b}$ und eingesetzt werden in
II) $\frac{27}{b} \cdot b^3 = 5{,}5$ bzw. $27 \cdot b^2 = 5{,}5$. Damit ist $b = \sqrt{\frac{5{,}5}{27}} \approx 0{,}45$.
$a = \frac{27}{0{,}45} = 60$.

b) $h(2) = 60 \cdot 0{,}45^2 = 12{,}15$ (mm)
$h(t) = 3 \Leftrightarrow 60 \cdot 0{,}45^t = 3$
$0{,}45^t = 0{,}05$
$t = \log_{0{,}45} 0{,}05 \approx 3{,}75$ (min)

c) Nach sehr langer Zeit nähert sich die Höhe der Krone dem Wert Null an.

d) (Es ist $h(6) \approx 0{,}50$ mm)



e) Die Gleichung $60 \cdot 0{,}45^t = 0{,}5 \cdot 60$ besitzt die Lösung
$t = \log_{0{,}45}(0{,}5) \approx 0{,}87$ (min) ≈ 52 (s)

f) Würde der Prozess lineare erfolgen, wäre der zugehörige Funktionsterm $h_l(t) = a \cdot t + b$.
Mit den Funktionswerten $h(0) = 60$ und $h(1) = 27$ ergibt sich $h_l(t) = -33t + 60$.
Diese Funktion besitzt die Nullstelle $t_1 = \frac{60}{33} \approx 1{,}82$.
Der Schaum wäre nach weniger als zwei Minuten vollständig zerfallen.